Petre Năchilă Cătălin Eugen Năchilă

Ora de matematică

Clasa a XII-a

Editura NOMINA

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programele şcolare în vigoare.

Editor: Alexandru Creangă
Imagine copertă: Ioana Pioaru

Pentru comenzi prin poştă: 0757.020.442
0348.439.417

Telefon	**Zona**
0741.488.918	Oltenia (Dolj, Gorj şi Mehedinți), Banat şi Transilvania (Alba şi Hunedoara);
0748.111.247	Crişana şi Transilvania (Sălaj, Cluj, Mureş, Harghita şi Covasna);
0751.207.922	Oltenia (Vâlcea şi Olt), Transilvania (Braşov şi Sibiu) şi Muntenia (Argeş, Teleorman şi Giurgiu);
0757.020.443	Transilvania (jud. Bistrița-Năsăud) şi zona Maramureş;
0746.200.413, 0769.221.685	Buzău, Bacău, Neamț, Suceava; Vrancea, Vaslui, Iaşi, Botoşani;
0744.429.512	Muntenia (Dâmbovița, Prahova, Brăila, Ialomița şi Călăraşi), Dobrogea şi jud. Galați;
0755.107.291, 0769.221.680, 0757.020.440	Bucureşti

Punct de lucru: Loc. Bradu, DN 65B, nr. 31, jud. Argeş
e-mail: comenzi.nomina@gmail.com
www.edituranomina.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NĂCHILĂ, PETRE
Ora de matematică : clasa a XII-a / Petre Năchilă, Cătălin Eugen Năchilă. - Piteşti : Nomina, 2021
ISBN 978-606-535-880-5

I. Năchilă, Cătălin

51

ALGEBRĂ

Capitolul 1
GRUPURI

1.1. Lege de compoziție internă. Parte stabilă

Definiţia 1. Fie o mulțime nevidă M. Se numeşte *lege de compoziție (internă) pe M* (sau operație algebrică pe M sau operație binară pe M) o aplicație $f : M \times M \to M$.

Elementul corespunzător cuplului (perechii) (x, y) prin funcția (aplicația) f se numeşte *compusul* lui x cu y (în această ordine!) şi se notează cu $f((x, y))$ sau, mai simplu $f(x, y)$.

Observaţie: Pentru legea de compoziție se folosesc diverse notații: aditivă $(x + y)$; multiplicativă $(x \cdot y)$; $x \circ y$; $x \perp y$; $x \top y$; $x \vee y$; $x \wedge y$; $x \Delta y$; $x \oplus y$; $x \odot y$ etc.

Definiţia 2. Fie legea de compoziție $f : M \times M \to M$ şi $H \subset M$, $H \neq \emptyset$. Mulțimea H se numeşte *parte stabilă* a lui M în raport cu legea f dacă pentru orice $x, y \in H$ avem $f(x, y) \in H$.

Exemple. 1. Adunarea şi înmulțirea sunt legi de compoziție pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$,$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Fie $A \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(A) = \{g : A \to A\}$. Aplicația $f : \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(A)$, $f(g, h) = g \circ h$ este lege de compoziție pe $\mathcal{F}(A)$.

3. Fie $A \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$. Aplicațiile $f, g : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, $f(X, Y) = X \cup Y$; $g(X, Y) = X \cap Y$ sunt legi de compoziție.

4. Scăderea pe $\mathbb{N}$ nu este operație algebrică. Împărțirea pe $\mathbb{N}^*$ şi $\mathbb{Z}^*$ nu sunt operații algebrice.

5. Dacă avem M mulțime finită $(m = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, legea de compoziție poate fi dată prin tabla operației (tabla lui Cayley), astfel:

$\circ$	a_1	a_2	$\ldots$	a_j	$\ldots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	$\ldots$	$a_1 \circ a_j$	$\ldots$	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	$\ldots$	$a_2 \circ a_j$	$\ldots$	$a_2 \circ a_n$
$\vdots$						
a_j	$a_i \circ a_1$	$a_i \circ a_2$	$\ldots$	$a_i \circ a_j$	$\ldots$	$a_i \circ a_n$
$\vdots$						
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\ldots$	$a_n \circ a_j$	$\ldots$	$a_n \circ a_n$

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $M = \{1, 2, 3, 4\}$ şi aplicaţia $f(x, y) = \begin{cases} x - y, x \geq 3, y \leq 2 \\ x + |x - y|, \text{ în rest} \end{cases}$. Este f lege de compoziţie?

Soluţie. Avem tabla operaţiei:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	2	3	4
3	2	1	3	4
4	3	2	**5**	4

Deoarece $f(4, 3) = 5 \notin M$, f nu este lege de compoziţie.

2. Fie $M = [3; 5]$ şi $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$, $\forall\, x, y \in M$. Demonstraţi că „$\circ$" este lege de compoziţie pe M.

Soluţie. Fie $x, y \in [3, 5]$. Avem $x - 4 \in [-1, 1]$; $y - 4 \in [-1, 1]$ şi deci $(x - 4)(y - 4) \in [-1, 1]$. Cum $x \circ y = (x - 4)(y - 4) + 4$, atunci avem $x \circ y \in M$.

3. Demonstraţi că înmulţirea matricelor pe M este lege de compoziţie, unde:

$$M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \right\}.$$

Soluţie. Fie $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Avem $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 & 1-y \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-y & 0 & y \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1+2xy-x-y & 0 & -(2xy-x-y) \\ 0 & 0 & 0 \\ -(2xy-x-y) & 0 & 1+2xy-x-y \end{pmatrix} = A(2xy - x - y + 1)$. Trebuie demonstrat că $1 + 2xy - x - y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Din $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ avem $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) \neq 0$, de unde rezultă că $2xy - x - y + 1 \neq \frac{1}{2}$.

4. Fie $H = \left\{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q},\, x^2 - 2y^2 = 1\right\}$. Demonstraţi că H este parte stabilă infinită a lui $\mathbb{R}$ în raport cu înmulţirea.

Soluţie. Fie $x, y, a, b \in \mathbb{Q}$, cu $x^2 - 2y^2 = 1$, $a^2 - 2b^2 = 1$. Avem:
$t = \left(x + y\sqrt{2}\right)\left(a + b\sqrt{2}\right) = (ax + 2by) + (ay + bx)\sqrt{2}$. Cum $ax + 2by \in \mathbb{Q}$, $ay + bx \in \mathbb{Q}$

şi $(ax+2by)^2-2(ay+bx)^2=a^2x^2+4b^2y^2-2a^2y^2-2b^2x^2=(a^2-2b^2)(x^2-2y^2)=1$ rezultă $t \in H$. Observăm că $x=3+2\sqrt{2} \in H$. Atunci $x^2, x^3, \ldots, x^n \in H$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}=A$ este infinită şi $A \subset H$, avem H infinită.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinaţi numărul operaţiilor algebrice definite pe $M=\{0, 1\}$.

2. Justificaţi de ce împărţirea nu este operaţie algebrică pe fiecare din mulţimile $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

3. Justificaţi de ce adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea nu sunt legi de compoziţie pe mulţimea numerelor iraţionale.

4. a) Demonstraţi că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ avem:

$$\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2},\ \min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

b) Pe care din mulţimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, „max” şi „min” sunt legi de compoziţie?

5. Demonstraţi că „$\circ$” este lege de compoziţie în cazurile:

a) $M=(3, \infty)$, $x \circ y = xy-3x-3y+12$; b) $M=[2, \infty)$, $x \circ y = xy-2x-2y+6$;

c) $M=[4, 6]$, $x \circ y = xy-5x-5y+30$; d) $M=(6, 8)$, $x \circ y = xy-7x-7y+56$;

e) $M=(-1, 1)$, $x \circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$; f) $M=[3, \infty)$, $x \circ y = 2xy-6(x+y)+21$;

g) $M=(-\infty, 1)$, $x \circ y = \dfrac{xy-2}{x+y-3}$; h) $M=\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x \circ y = \dfrac{1}{2}(1+x+y-xy)$.

6. Demonstraţi că înmulţirea este lege de compoziţie pe mulţimile:

a) $M=\left\{\begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix} \mid a>0\right\}$; b) $M=\left\{\begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix} \mid a>-1\right\}$;

c) $M=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\}$; d) $M=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & 2a^2+2a \\ 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$;

e) $M=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ bi & a+bi \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\}$; f) $M=\left\{\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R}, x^2+y^2 \neq 0\right\}$.

7. Studiați dacă mulțimea M este parte stabilă pentru $(\mathbb{C}, \cdot)$:

a) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$; b) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$;

c) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = \overline{z}\}$; d) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$.

8. Demonstrați că „$\circ$” este lege de compoziție în cazurile:

a) $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\right\}$; $A \circ B = AB + BA$;

b) $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$; $x \circ y = x + y + \dfrac{xy}{2}$; c) $M = \mathbb{C} \setminus \{1\}$; $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2$;

d) $M = [0, a]$, $a > 0$; $x \circ y = \dfrac{x + y}{1 + \dfrac{xy}{a^2}}$; e) $M = (0, \infty) \setminus \{1\}$, $x \circ y = x^{\ln y}$;

f) $M = (1, 2)$; $x \circ y = \dfrac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}$;

g) $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z},\ x \text{ impar} \right\}$.

9. Demonstrați că M este parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \cdot)$, unde $M = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ în următoarele cazuri:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Fie $M \subset \mathbb{C}$ astfel încât $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset M$. Ştiind că M este parte stabilă față de adunarea numerelor complexe, demonstrați că $B \subset M$, unde $B = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

11. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi legea „$\circ$” definită pe $\mathbb{R}$ prin $x \circ y = x + y - xy - a(x + y) + a$. Determinați a astfel încât $H = (0, 1]$ să fie este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$\circ$”.

12. Pe $\mathbb{R}$ este definită legea $x \circ y = xy - x - y$. Demonstrați că $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ nu sunt părți stabile ale lui $(\mathbb{R}, \circ)$.

13. Determinați părțile stabile finite ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu adunarea (respectiv înmulțirea) pe $\mathbb{R}$.

14. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ şi $M = \{x = aA + bI_2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

a) Demonstraţi că M este parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \cdot)$.

b) Demonstraţi că există $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = a_nA + b_nI_2$.

15. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea „$\circ$” prin $a \circ b = \begin{cases} 0, & a+b \in 2\mathbb{Z}+1 \\ 1, & a+b \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$. Calculaţi $A = (a \circ b) \circ c$ şi $B = a \circ (b \circ c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1.2. Asociativitate. Comutativitate

Definiţie. Fie legea de compoziţie $f : M \times M \to M$.
Legea f se numeşte *comutativă* dacă $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall\, x, y \in M$.
Legea f se numeşte *asociativă* dacă $f(f(x, y), z)) = f(x, f(y, z)))$, $\forall\, x, y, z \in M$.
Pentru notaţia aditivă: $x + y = y + x$; $(x + y) + z = x + (y + z)$.
Pentru notaţia multiplicativă: $xy = yx$; $(xy)z = x(yz)$.

Exemple. 1. Adunarea şi înmulţirea pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sunt asociative şi comutative.

2. Adunarea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este comutativă şi asociativă.

3. Înmulţirea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este asociativă, dar nu este comutativă.

4. Scăderea pe $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nu este nici comutativă, nici asociativă.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie o mulţime $M \neq \varnothing$ având card $M = n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Determinaţi numărul legilor de compoziţie comutative definite pe M.
Soluţie. Legea este comutativă dacă tabla legii (tabla lui Cayley) este simetrică faţă de diagonala principală. Trebuie determinat numărul elementelor $a_i \circ a_j$, unde $1 \leq i < j \leq n$. Avem $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ asemenea elemente. Din numărul total n^{n^2} de legi avem $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ comutative.

2. Daţi exemple de legi definite pe mulţimi finite:
a) comutativă, care nu este asociativă;
b) asociativă, care nu este comutativă.

Soluție. a)

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a	e
b	b	e	a

b)

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	b
b	b	a	b

a) $(b \circ a) \circ a = e \circ a = a$; $b \circ (a \circ a) = b \circ a = e$.

3. Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$, știind că legea „$\circ$” definită pe $\mathbb{R}$ prin $x \circ y = ax + by + c$, $x, y \in \mathbb{R}$, este comutativă și asociativă.

Soluție. Avem $x \circ y = y \circ x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ax + by + c = ay + bx + c$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = b$. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Avem $(x \circ y) \circ z = a^2x + aby + bz + ac + c$ și $x \circ (y \circ z) =$ $= ax + aby + b^2z + bc + c$. Legea este asociativă dacă și numai dacă $a^2 = a$, $b^2 = b$ și $ac = bc$. Tripletele (a, b, c) pentru care legea este asociativă sunt $(0, 0, c)$, $(1, 1, c)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$. Legea este comutativă și asociativă în cazurile $(0, 0, c)$ și $(1, 1, c)$.

4. Fie $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\}$.

a) Demonstrați că „$\cdot$” pe M este asociativă și comutativă.

b) Rezolvați ecuația $A^n(a) = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 \\ 32 & 0 & 32 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

Soluție. a) Avem $A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 1 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix} = A(2ab)$. Cum $A(2ab) = A(2ba) =$ $= A(b) \cdot A(a) \Rightarrow$ înmulțirea pe M este comutativă. Deoarece „$\cdot$” pe $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este asociativă și $M \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, rezultă că înmulțirea pe M este asociativă. Altfel, avem: $(A(b) \cdot A(b)) \cdot A(c) = (A(2ab)) \cdot A(c) = A(2 \cdot 2ab \cdot c) = A(4abc) = A(2a \cdot (2bc)) = A(a) \cdot$ $\cdot A(2bc) = A(a) \cdot (A(b) \cdot A(c))$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

b) $A^2(a) = A(2a^2)$, $A^3(a) = A(2a^2) \cdot A(a) = A(2^2 \cdot a^3)$. Prin inducție rezultă $A^n(a) =$ $= A(2^{n-1}a^n)$. Avem $A^n(a) = A(32) \Leftrightarrow 2^{n-1}a^n = 32$; $(2a)^n = 64 = (\pm 2)^6$. Pentru (n, a) avem soluțiile $(6; \pm 1)$; $(3; 2)$; $(32; 1)$.

PROBLEME PROPUSE

1. Studiați asociativitatea și comutativitatea legilor de compoziție de la exercițiile 4, 5, 6, 8, 9 de la paragraful 1.1.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi legea „$\circ$” definită prin $x \circ y = \sqrt[n]{xy}$:

a) În ce cazuri avem lege de compoziţie?

b) Demonstraţi că, dacă avem lege de compoziţie, ea nu este asociativă.

c) Determinaţi două părţi stabile $H \subset \mathbb{R}$ pentru care legea este asociativă.

1.3. Element neutru. Element simetrizabil

Definiţia 1. Un elemene $e \in M$ se numeşte *element neutru* pentru legea de compoziţie $f : M \times M \to M$ dacă $f(x, e) = f(e, x) = x$, $\forall\ x \in M$.

Pentru notaţiile aditivă sau multiplicativă, elementele neutre se notează cu 0, respectiv 1, şi se numesc *elementul nul* (sau elementul zero), respectiv *elementul unitate*.

Exemple. 1. Pentru $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ avem $e = 0$.

2. Pentru $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, \cdot)$ avem $e = 1$.

3. Pentru $(\mathcal{P}(A), \cup)$ avem $e = \varnothing$. Pentru $(\mathcal{P}(A), \cap)$ avem $e = A$.

4. Pentru $(\mathcal{F}(A), \circ)$ avem $e = 1_A$ (funcţia identică a mulţimii A).

5. Pentru $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), +)$ avem $e = 0_{m,n}$ (matricea nulă).

6. Pentru $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ avem $e = I_n$ (matricea unitate).

Teorema 1. Dacă o lege de compoziţie admite un element neutru, atunci acesta este unic.

Definiţia 2. Fie f o lege de compoziţie pe M ce admite elementul neutru e. Un element $x \in M$ se numeşte *simetrizabil* în raport cu legea f dacă există $x' \in M$ astfel încât $f(x, x') = f(x', x) = e$.

În notaţia aditivă, x' se numeşte *opusul* lui x şi se notează cu $-x$.

În notaţia multiplicativă, x' se numeşte *inversul* lui x şi se notează cu x^{-1}.

Teorema 2. Fie $\varphi : M \times M \to M$ o lege de compoziţie asociativă. Dacă $x \in M$ este simetrizabil, atunci simetricul său x' este unic.

Exemple. 7. Orice număr din $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ admite opusul $-x$.

8. Pentru $(\mathbb{N}, +)$ avem un singur element simetrizabil (pe 0).

9. Orice $x \neq 0$ din $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ admite inversul $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

10. Pentru $(\mathbb{N}, \cdot)$, doar 1 este inversabil. Pentru $(\mathbb{Z}, \cdot)$, doar 1 şi -1 sunt inversabile.

11. Singurele matrice A din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabile sunt cele cu $\det A \neq 0$.

Teorema 3. Fie legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $f : M \times M \to M$. Dacă $x, y \in M$ sunt simetrizabile şi au simetricele x' şi y', atunci $x \circ y$ şi x' sunt simetrizabile şi avem $(x \circ y)' = y' \circ x'$; $(x')' = x$.

CUPRINS