

Petre Năchilă

Cătălin Eugen Năchilă

Ora de matematică

Clasa a XII-a

Editura NOMINA

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programele școlare în vigoare.

Editor: Alexandru Creangă
Imagine copertă: Ioana Pioaru

Pentru comenzi prin poștă: 0757.020.442
0348.439.417

Telefon	Zona
0741.488.918	Oltenia (Dolj, Gorj și Mehedinți), Banat și Transilvania (Alba și Hunedoara);
0748.111.247	Crișana și Transilvania (Sălaj, Cluj, Mureș, Harghita și Covasna);
0751.207.922	Oltenia (Vâlcea și Olt), Transilvania (Brașov și Sibiu) și Muntenia (Argeș, Teleorman și Giurgiu);
0757.020.443	Transilvania (jud. Bistrița-Năsăud) și zona Maramureș;
0746.200.413, 0769.221.685	Buzău, Bacău, Neamț, Suceava; Vrancea, Vaslui, Iași, Botoșani;
0744.429.512	Muntenia (Dâmbovița, Prahova, Brăila, Ialomița și Călărași), Dobrogea și jud. Galați;
0755.107.291, 0769.221.680, 0757.020.440	București

Punct de lucru: Loc. Bradu, DN 65B, nr. 31, jud. Argeș
e-mail: comenzi.nomina@gmail.com
www.edituranomina.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NĂCHILĂ, PETRE

Ora de matematică : clasa a XII-a / Petre Năchilă, Cătălin Eugen
Năchilă. - Pitești : Nomina, 2021
ISBN 978-606-535-880-5

I. Năchilă, Cătălin

51

ALGEBRĂ

Capitolul 1 GRUPURI

1.1. Lege de compoziție internă. Parte stabilă

Definiția 1. Fie o mulțime nevidă M . Se numește *lege de compoziție (internă) pe M* (sau operație algebrică pe M sau operație binară pe M) o aplicație $f: M \times M \rightarrow M$.

Elementul corespunzător cuplului (perechii) (x, y) prin funcția (aplicația) f se numește *compusul* lui x cu y (în această ordine!) și se notează cu $f((x, y))$ sau, mai simplu $f(x, y)$.

Observație: Pentru legea de compoziție se folosesc diverse notații: aditivă $(x + y)$; multiplicativă $(x \cdot y)$; $x \circ y$; $x \perp y$; $x \top y$; $x \vee y$; $x \wedge y$; $x \Delta y$; $x \oplus y$; $x \odot y$ etc.

Definiția 2. Fie legea de compoziție $f: M \times M \rightarrow M$ și $H \subset M$, $H \neq \emptyset$. Mulțimea H se numește *parte stabilă* a lui M în raport cu legea f dacă pentru orice $x, y \in H$ avem $f(x, y) \in H$.

Exemple. 1. Adunarea și înmulțirea sunt legi de compoziție pe \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Fie $A \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(A) = \{g: A \rightarrow A\}$. Aplicația $f: \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$, $f(g, h) = g \circ h$ este lege de compoziție pe $\mathcal{F}(A)$.

3. Fie $A \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$. Aplicațiile $f, g: \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, $f(X, Y) = X \cup Y$; $g(X, Y) = X \cap Y$ sunt legi de compoziție.

4. Scăderea pe \mathbb{N} nu este operație algebrică. Împărțirea pe \mathbb{N}^* și \mathbb{Z}^* nu sunt operații algebrice.

5. Dacă avem M mulțime finită ($m = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, legea de compoziție poate fi dată prin tabla operației (tabla lui Cayley), astfel:

\circ	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$...	$a_1 \circ a_j$...	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$...	$a_2 \circ a_j$...	$a_2 \circ a_n$
\vdots						
a_j	$a_i \circ a_1$	$a_i \circ a_2$...	$a_i \circ a_j$...	$a_i \circ a_n$
\vdots						
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$...	$a_n \circ a_j$...	$a_n \circ a_n$

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $M = \{1, 2, 3, 4\}$ și aplicația $f(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq 3, y \leq 2 \\ x + |x - y|, & \text{în rest} \end{cases}$. Este f lege de compoziție?

Soluție. Avem tabla operației:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	2	3	4
3	2	1	3	4
4	3	2	5	4

Deoarece $f(4, 3) = 5 \notin M$, f nu este lege de compoziție.

2. Fie $M = [3; 5]$ și $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$, $\forall x, y \in M$. Demonstrați că „ \circ ” este lege de compoziție pe M .

Soluție. Fie $x, y \in [3, 5]$. Avem $x - 4 \in [-1, 1]$; $y - 4 \in [-1, 1]$ și deci $(x - 4)(y - 4) \in [-1, 1]$. Cum $x \circ y = (x - 4)(y - 4) + 4$, atunci avem $x \circ y \in M$.

3. Demonstrați că înmulțirea matricelor pe M este lege de compoziție, unde:

$$M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right\}.$$

Soluție. Fie $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Avem $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 & 1-y \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-y & 0 & y \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2xy - x - y & 0 & -(2xy - x - y) \\ 0 & 0 & 0 \\ -(2xy - x - y) & 0 & 1 + 2xy - x - y \end{pmatrix} = A(2xy - x - y + 1). \text{ Trebuie demonstrat că}$$

$1 + 2xy - x - y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Din $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ avem $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) \neq 0$, de unde rezultă că $2xy - x - y + 1 \neq \frac{1}{2}$.

4. Fie $H = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 2y^2 = 1\}$. Demonstrați că H este parte stabilă infinită a lui \mathbb{R} în raport cu înmulțirea.

Soluție. Fie $x, y, a, b \in \mathbb{Q}$, cu $x^2 - 2y^2 = 1$, $a^2 - 2b^2 = 1$. Avem:

$$t = (x + y\sqrt{2})(a + b\sqrt{2}) = (ax + 2by) + (ay + bx)\sqrt{2}. \text{ Cum } ax + 2by \in \mathbb{Q}, ay + bx \in \mathbb{Q}$$

și $(ax + 2by)^2 - 2(ay + bx)^2 = a^2x^2 + 4b^2y^2 - 2a^2y^2 - 2b^2x^2 = (a^2 - 2b^2)(x^2 - 2y^2) = 1$ rezultă $t \in H$. Observăm că $x = 3 + 2\sqrt{2} \in H$. Atunci $x^2, x^3, \dots, x^n \in H$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = A$ este infinită și $A \subset H$, avem H infinită.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinați numărul operațiilor algebrice definite pe $M = \{0, 1\}$.
2. Justificați de ce împărțirea nu este operație algebrică pe fiecare din mulțimile $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
3. Justificați de ce adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea nu sunt legi de compoziție pe mulțimea numerelor iraționale.
4. a) Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ avem:

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

b) Pe care din mulțimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, „max” și „min” sunt legi de compoziție?

5. Demonstrați că „o” este lege de compoziție în cazurile:

- a) $M = (3, \infty), x \circ y = xy - 3x - 3y + 12;$ b) $M = [2, \infty), x \circ y = xy - 2x - 2y + 6;$
c) $M = [4, 6], x \circ y = xy - 5x - 5y + 30;$ d) $M = (6, 8), x \circ y = xy - 7x - 7y + 56;$
e) $M = (-1, 1), x \circ y = \frac{x + y}{1 + xy};$ f) $M = [3, \infty), x \circ y = 2xy - 6(x + y) + 21;$
g) $M = (-\infty, 1), x \circ y = \frac{xy - 2}{x + y - 3};$ h) $M = \mathbb{R} \setminus \{1\}, x \circ y = \frac{1}{2}(1 + x + y - xy).$

6. Demonstrați că înmulțirea este lege de compoziție pe mulțimile:

- a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 5a & 10a \\ -2a & 1 - 4a \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\};$ b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 2a & a \\ -2a & 1 - a \end{pmatrix} \mid a > -1 \right\};$
c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\};$ d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 2a^2 + 2a \\ 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\};$
e) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ bi & a + bi \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\};$ f) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}.$

7. Studiați dacă mulțimea M este parte stabilă pentru (\mathbb{C}, \cdot) :

a) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$;

b) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$;

c) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = \bar{z}\}$;

d) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$.

8. Demonstrați că „ \circ ” este lege de compoziție în cazurile:

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$; $A \circ B = AB + BA$;

b) $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$; $x \circ y = x + y + \frac{xy}{2}$; c) $M = \mathbb{C} \setminus \{1\}$; $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2$;

d) $M = [0, a]$, $a > 0$; $x \circ y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}}$; e) $M = (0, \infty) \setminus \{1\}$, $x \circ y = x^{\ln y}$;

f) $M = (1, 2)$; $x \circ y = \frac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}$;

g) $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}, x \text{ impar} \right\}$.

9. Demonstrați că M este parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \cdot)$, unde $M = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ în următoarele cazuri:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Fie $M \subset \mathbb{C}$ astfel încât $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset M$. Știind că M este parte stabilă față de adunarea numerelor complexe, demonstrați că $B \subset M$, unde $B = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

11. Fie $a \in \mathbb{R}$ și legea „ \circ ” definită pe \mathbb{R} prin $x \circ y = x + y - xy - a(x + y) + a$. Determinați a astfel încât $H = (0, 1]$ să fie parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea „ \circ ”.

12. Pe \mathbb{R} este definită legea $x \circ y = xy - x - y$. Demonstrați că $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ nu sunt părți stabile ale lui (\mathbb{R}, \circ) .

13. Determinați părțile stabile finite ale lui \mathbb{R} în raport cu adunarea (respectiv înmulțirea) pe \mathbb{R} .

14. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ și $M = \{x = aA + bI_2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

a) Demonstrați că M este parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \cdot)$.

b) Demonstrați că există $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = a_n A + b_n I_2$.

15. Pe \mathbb{Z} definim legea „ \circ ” prin $a \circ b = \begin{cases} 0, & a + b \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ 1, & a + b \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$. Calculați $A = (a \circ b) \circ c$ și

$B = a \circ (b \circ c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1.2. Asociativitate. Comutativitate

Definiție. Fie legea de compoziție $f: M \times M \rightarrow M$.

Legea f se numește *comutativă* dacă $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall x, y \in M$.

Legea f se numește *asociativă* dacă $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$, $\forall x, y, z \in M$.

Pentru notația aditivă: $x + y = y + x$; $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Pentru notația multiplicativă: $xy = yx$; $(xy)z = x(yz)$.

Exemple. 1. Adunarea și înmulțirea pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sunt asociative și comutative.

2. Adunarea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este comutativă și asociativă.

3. Înmulțirea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este asociativă, dar nu este comutativă.

4. Scăderea pe $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nu este nici comutativă, nici asociativă.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie o mulțime $M \neq \emptyset$ având card $M = n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Determinați numărul legilor de compoziție comutative definite pe M .

Soluție. Legea este comutativă dacă tabla legii (tabla lui Cayley) este simetrică față de diagonala principală. Trebuie determinat numărul elementelor $a_i \circ a_j$, unde $1 \leq i < j \leq n$.

Avem $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ asemenea elemente. Din numărul total n^{n^2} de legi

avem $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ comutative.

2. Dați exemple de legi definite pe mulțimi finite:

a) comutativă, care nu este asociativă;

b) asociativă, care nu este comutativă.

Soluție. a)

e	a	b
e	a	b
a	a	e
b	b	a

b)

e	a	b
e	a	b
a	e	b
b	a	b

a) $(b \circ a) \circ a = e \circ a = a$; $b \circ (a \circ a) = b \circ a = e$.

3. Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$, știind că legea „ \circ ” definită pe \mathbb{R} prin $x \circ y = ax + by + c$, $x, y \in \mathbb{R}$, este comutativă și asociativă.

Soluție. Avem $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ax + by + c = ay + bx + c, \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = b$. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Avem $(x \circ y) \circ z = a^2x + aby + bz + ac + c$ și $x \circ (y \circ z) = ax + aby + b^2z + bc + c$. Legea este asociativă dacă și numai dacă $a^2 = a, b^2 = b$ și $ac = bc$. Tripletele (a, b, c) pentru care legea este asociativă sunt $(0, 0, c), (1, 1, c), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$. Legea este comutativă și asociativă în cazurile $(0, 0, c)$ și $(1, 1, c)$.

4. Fie $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\}$.

a) Demonstrați că „ \cdot ” pe M este asociativă și comutativă.

b) Rezolvați ecuația $A^n(a) = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 \\ 32 & 0 & 32 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

Soluție. a) Avem $A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 1 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix} = A(2ab)$. Cum $A(2ab) = A(2ba) =$

$= A(b) \cdot A(a) \Rightarrow$ înmulțirea pe M este comutativă. Deoarece „ \cdot ” pe $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este asociativă și $M \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, rezultă că înmulțirea pe M este asociativă. Altfel, avem:

$(A(b) \cdot A(b)) \cdot A(c) = (A(2ab)) \cdot A(c) = A(2 \cdot 2ab \cdot c) = A(4abc) = A(2a \cdot (2bc)) = A(a) \cdot A(2bc) = A(a) \cdot (A(b) \cdot A(c)), \forall a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

b) $A^2(a) = A(2a^2), A^3(a) = A(2a^2) \cdot A(a) = A(2^2 \cdot a^3)$. Prin inducție rezultă $A^n(a) = A(2^{n-1}a^n)$. Avem $A^n(a) = A(32) \Leftrightarrow 2^{n-1}a^n = 32; (2a)^n = 64 = (\pm 2)^6$. Pentru (n, a) avem soluțiile $(6; \pm 1); (3; 2); (32; 1)$.

PROBLEME PROPUSE

1. Studiați asociativitatea și comutativitatea legilor de compoziție de la exercițiile 4, 5, 6, 8, 9 de la paragraful 1.1.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și legea „ \circ ” definită prin $x \circ y = \sqrt[n]{xy}$:

- În ce cazuri avem lege de compoziție?
- Demonstrați că, dacă avem lege de compoziție, ea nu este asociativă.
- Determinați două părți stabile $H \subset \mathbb{R}$ pentru care legea este asociativă.

1.3. Element neutru. Element simetrizabil

Definiția 1. Un elemene $e \in M$ se numește *element neutru* pentru legea de compoziție $f: M \times M \rightarrow M$ dacă $f(x, e) = f(e, x) = x$, $\forall x \in M$.

Pentru notațiile aditivă sau multiplicativă, elementele neutre se notează cu 0, respectiv 1, și se numesc *elementul nul* (sau *elementul zero*), respectiv *elementul unitate*.

Exemple. 1. Pentru $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ avem $e = 0$.

2. Pentru (\mathbb{N}, \cdot) , (\mathbb{Z}, \cdot) , (\mathbb{Q}, \cdot) , (\mathbb{R}, \cdot) , (\mathbb{C}, \cdot) avem $e = 1$.

3. Pentru $(\mathcal{P}(A), \cup)$ avem $e = \emptyset$. Pentru $(\mathcal{P}(A), \cap)$ avem $e = A$.

4. Pentru $(\mathcal{F}(A), \circ)$ avem $e = 1_A$ (funcția identică a mulțimii A).

5. Pentru $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), +)$ avem $e = 0_{m,n}$ (matricea nulă).

6. Pentru $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ avem $e = I_n$ (matricea unitate).

Teorema 1. Dacă o lege de compoziție admite un element neutru, atunci acesta este unic.

Definiția 2. Fie f o lege de compoziție pe M ce admite elementul neutru e . Un element $x \in M$ se numește *simetrizabil* în raport cu legea f dacă există $x' \in M$ astfel încât $f(x, x') = f(x', x) = e$.

În notația aditivă, x' se numește *opusul* lui x și se notează cu $-x$.

În notația multiplicativă, x' se numește *inversul* lui x și se notează cu x^{-1} .

Teorema 2. Fie $\varphi: M \times M \rightarrow M$ o lege de compoziție asociativă. Dacă $x \in M$ este simetrizabil, atunci simetricul său x' este unic.

Exemple. 7. Orice număr din \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} admite opusul $-x$.

8. Pentru $(\mathbb{N}, +)$ avem un singur element simetrizabil (pe 0).

9. Orice $x \neq 0$ din \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} admite inversul $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

10. Pentru (\mathbb{N}, \cdot) , doar 1 este inversabil. Pentru (\mathbb{Z}, \cdot) , doar 1 și -1 sunt inversabile.

11. Singurele matrice A din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabile sunt cele cu $\det A \neq 0$.

Teorema 3. Fie legea de compoziție asociativă și cu element neutru $f: M \times M \rightarrow M$. Dacă $x, y \in M$ sunt simetrizabile și au simetricile x' și y' , atunci $x \circ y$ și x' sunt simetrizabile și avem $(x \circ y)' = y' \circ x'$; $(x')' = x$.

CUPRINS

ALGEBRĂ

Capitolul 1. GRUPURI

1.1. Lege de compoziție internă. Parte stabilă	3
1.2. Asociativitate. Comutativitate	7
1.3. Element neutru. Element simetrizabil	9
1.4. Monoizi	11
1.5. Clase de resturi modulo n	13
1.6. Grupuri	15
1.7. Grupuri de matrice. Grupuri de permutări. Grupul U_n	18
1.8. Reguli de calcul într-un grup	19
1.9. Subgrupuri	22
1.10. Grupuri finite	25
1.11. Morfisme și izomorfisme de grupuri	27
1.12. TESTE DE EVALUARE	31

Capitolul 2. INELE ȘI CORPURI

2.1. Inele. Exemple	34
2.2. Reguli de calcul într-un inel	37
2.3. Corpuri	39
2.4. Morfisme și izomorfisme de inele și corpuri	41
2.5. Ecuații și sisteme de ecuații în \mathbb{Z}_n	43
2.6. TESTE DE EVALUARE	47

Capitolul 3. INELE DE POLINOAME

3.1. Forma algebrică a unui polinom. Gradul unui polinom. Funcția polinomială	48
3.2. Teorema împărțirii cu rest. Schema lui Horner	51
3.3. Divizibilitatea polinoamelor. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili	53
3.4. Rădăcinile polinoamelor. Ecuații reciproce. Ecuații binome	59
3.5. Relațiile lui Viète	62
3.6. Polinoame cu coeficienți reali	66
3.7. Polinoame cu coeficienți în \mathbb{Q} . Polinoame cu coeficienți în \mathbb{Z}	69
3.8. TESTE DE EVALUARE	73

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul 4. PRIMITIVE

4.1. Noțiunea de primitivă. Operații cu funcții care admit primitive	75
4.2. Operații cu funcții care admit primitive	79
4.3. Funcții care nu admit primitive	82
4.4. Integrarea prin părți	86

4.5. Metoda schimbării de variabilă	89
4.6. Descompunerea funcțiilor raționale în funcții raționale simple.....	96
4.7. Integrarea funcțiilor raționale simple	102
4.8. Integrarea funcțiilor raționale	107
4.9. Integrarea prin recurență.....	110
4.10. Integrarea anumitor tipuri de funcții.....	113
4.11. Integrarea funcțiilor trigonometrice.....	116
4.12. Integrarea funcțiilor iraționale.....	120
4.13. TESTE DE EVALUARE	124
Capitolul 5. INTEGRALA DEFINITĂ	
5.1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală. Diviziuni. Sume Riemann. Funcții integrabile	129
5.2. Proprietăți ale integralei definite	133
5.3. Aditivitatea integralei. Teorema de medie. Integrarea funcțiilor mărginite	135
5.4. Integrarea prin părți a integralelor definite	140
5.5. Schimbarea de variabilă pentru integrale definite	144
5.6. Calculul unor limite du integrale. Șiruri de integrale definite	151
5.7. TESTE DE EVALUARE	153
5.8. PROBLEME DE SINTEZĂ.....	156
Capitolul 6. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE	
6.1. Calculul limitelor de șiruri folosind integrala definită	162
6.2. Aria unei suprafețe plane.....	164
6.3. Volumul unui corp de rotație.....	168
6.4. TESTE DE EVALUARE	173
6.5. PROBLEME DE SINTEZĂ.....	175
SOLUȚII	181